INTRODUZIONE

Per EQUAZIONI DIFFERENZIALI intendiamo equazioni in cui l'INCOGNITA è una funzione $g(x)$, e in cui sono presenti una o più DERIVATE della FUNZIONE INCOGNITA.

ESEMPIO: A seguire qualche esempio di equazione differenziale:

- $g'(x) + g(x) = x$
- $g'''(x) + 3 \cdot g''(x) = 9x$

RISOLVERE una equazione differenziale significa trovare TUTTE le funzioni $f(x)$ che rendono vera l'UGUAGLIANZA ottenuta sostituendo alla FUNZIONE INCOGNITA la funzione $f(x)$.

OSS: Nelle equazioni NORMALI tipo $x^2 - 3 = 0$, $g(x) = x \cdot \cos(x)$, l'INCOGNITA è il valore x. Nelle equazioni DIFFERENZIALI tipo $g''(x) + g(x) = 0$ l'incognita è la funzione $g(x)$.

L'**ORDINE** di una equazione differenziale è definito come il MASSIMO ORDINE di derivazione che compare nell'equazione.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE	ORDINE
$g'(x) + g(x) = x$	PRIMO
$g'''(x) + 3 \cdot g''(x) = 9x$	TERZO
$g''(x) + g(x) = 0$	SECONDO

Notiamo che non esiste un METODO GENERALE che ci permette di risolvere qualsiasi tipo di equazione differenziale. Dobbiamo quindi sviluppare varie STRATEGIE, a seconda della particolare FORMA dell'equazione.

ESEMPIO: $g'(x) = x$

Per risolvere questa equazione procediamo come segue

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

Dunque la SOLUZIONE è rappresentata dalla FAMIGLIA di funzioni $f(x) = \frac{x^2}{2} + c$, al variare della COSTANTE $c \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO: $g'(x) = 2 - \sqrt{g(x)}$

Dato che questa volta la DERIVATA non è descritta in modo ESPLICITO, ovvero solo in funzione di x, ma è descritta in modo IMPLICITO, non possiamo utilizzare lo stesso procedimento visto prima.

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \underbrace{\int 2 - \sqrt{g(x)}\,dx}$$

Per calcolare questo necessito di conoscere $g(x)$, che è proprio la cosa che volevo calcolare inizialmente.

Noi analizzeremo in dettaglio le eq. diff. del PRIMO ORDINE, che, a seconda della loro FORMA, vengono suddivise nei seguenti gruppi

EQ. DIFF. DEL I° ORDINE
- EQUAZIONI DIFFERENZIALI "ELEMENTARI"
- EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI
- EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI "ELEMENTARI"

TIPOLOGIA 1

$$\boxed{y' = g(x)}$$

Basta INTEGRARE come segue

$$y = \int g(x)\,dx = G(x) + c$$

Ad esempio,

$$y' = 3e^{2x} \Rightarrow y = \int 3e^{2x}\,dx = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

TIPOLOGIA 2

$$\boxed{y'' = g(x)}$$

Basta integrare DUE VOLTE come segue

$$y' = \int g(x)\,dx = G(x) + c_1$$

$$y = \int G(x) + c_1\,dx = \int G(x)\,dx + c_1 \cdot x + c_2$$

Ad esempio,

$$y'' = 2 - \cos(x)$$

$$y' = \int 2 - \cos(x)\, dx = 2x - \sin(x) + C_1$$

$$y = \int 2x - \sin(x) + C_1 \, dx = x^2 + \cos(x) + C_1 x + C_2$$

Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = x^2 + \cos(x) + C_1 \cdot x + C_2$$

PROBLEMA DI CAUCHY

Un PROBLEMA DI CAUCHY è un SISTEMA di EQUAZIONI della forma

$$\begin{cases} \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE} \\ \text{CONDIZIONI INIZIALI} \end{cases}$$

RISOLVERE un sistema di Cauchy significa trovare, tra le infinite soluzioni dell'eq. differenziale, quella che SODDISFA le condizioni iniziali.

Ad esempio,

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$y' = -e^{-x} \Rightarrow y = \int -e^{-x}\,dx = e^{-x} + C$$

$$y(0) = 3 \Rightarrow e^{-0} + C = 3$$
$$\Rightarrow 1 + C = 3$$
$$\Rightarrow C = 3 - 1 = 2$$

Dunque la SOLUZIONE del PROBLEMA DI CAUCHY è data da

$$y(x) = e^{-x} + 2$$

OSS: Per poter risolvere un problema di Cauchy necessito che

1) le CONDIZIONI INIZIALI devono essere tante quanto il # di PARAMETRI da stimare.

2) le CONDIZIONI INIZIALI devono fissare i valori delle funzioni nello STESSO PUNTO

Eq. Differenziali a Variabili Separabili

Consideriamo adesso E.D. della seguente forma

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$$

Alcuni esempi,

- $y' = \underbrace{y}_{g(y)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)}$

- $y' = \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{y \ln y}_{g(y)}$

Per risolvere questo tipo di E.D. si procede nel seguente modo:

1) Si SEPARANO le variabili x e y

2) Si INTEGRA ciascun lato dell'equazione rispetto alla variabile da cui dipende.

3) Si RICAVA $y(x)$ dall'equazione trovata al punto (2).

A seguire qualche esempio,

ESEMPIO 1: $y' = y^2 \cdot \ln x$

1) SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

$$y' = y^2 \cdot \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2}\, dy = \ln x \, dx$$

2) INTEGRAZIONE

$$\frac{1}{y^2}\, dy = \ln x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \ln x \, dx$$

Risolvo individualmente i due integrali

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = -\frac{1}{y} + c_1$$

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + c_2$$

Combino le soluzioni trovate per ottenere,

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \ln x \,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} + c_1 = x\cdot \ln x - x + c_2$$

3) <u>RISOLVO PER y</u>

$$-\frac{1}{y} + c_1 = x\cdot \ln x - x + c_2$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = x\ln x - x + \underbrace{(c_2 - c_1)}_{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad -y = \frac{1}{x\ln x - x + c}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{-1}{x\ln x - x + c}$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = \frac{1}{x\ln x - x + c}$$

ESEMPIO 2:

$$\begin{cases} y' = \sin(x) \cdot e^{y} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

1) SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

$$y' = \sin(x) \cdot e^{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sin(x) \cdot e^{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{e^{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{e^{y}} \cdot dy = \sin(x) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-y}\, dy = \sin(x) \cdot dx$$

2) INTEGRAZIONE

$$e^{-y}\, dy = \sin(x) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int e^{-y}\, dy = \int \sin(x)\, dx$$

Risolvo individualmente i due integrali

$$\int e^{-y}\,dy = -e^{-y} + c_1$$

$$\int \sin(x)\,dx = \cos(x) + c_2$$

Combino le soluzioni trovate per ottenere,

$$\int e^{-y}\,dy = \int \sin(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad -e^{-y} + c_1 = \cos(x) + c_2$$

3) <u>RISOLVO PER y</u>

$$-e^{-y} + c_1 = \cos(x) + c_2$$

$$\Leftrightarrow \quad -e^{-y} = \cos(x) + (c_2 - c_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-y} = -\cos(x) + c$$

$$\Leftrightarrow \quad -y = \ln\left[-\cos(x) + c\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\ln\left[-\cos(x) + c\right]$$

Dunque la SOLUZIONE GENERALE è data da

$$y(x) = -\ln\left[-\cos(x) + c\right]$$

Volendo risolvere il PROBLEMA DI CAUCHY troviamo,

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\iff -\ln\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\right] = 1$$

$$\iff -\ln\left[0 + c\right] = 1$$

$$\iff -\ln c = 1$$

$$\iff \ln c = -1$$

$$\iff c = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Dunque la SOLUZIONE PARTICOLARE è data da

$$y(x) = -\ln\left[-\cos(x) + \frac{1}{e}\right]$$

Infine, bisogna verificare l'esistenza di SOLUZIONI COSTANTI. Ovvero, data

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Se ESISTE $\bar{y} \in \mathbb{R} : g(\bar{y}) = 0$, allora

$$y(x) = \bar{y}$$

è una SOLUZIONE dell'equazione differenziale.

E.D. LINEARI DEL I° ORDINE

Sono della forma

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$$

Notiamo noi che,

- Se $a(x)$, allora otteniamo

$$y'(x) = f(x)$$

che è una E.D. "ELEMENTARE"

- Se $f(x) = 0$, allora otteniamo

$$y'(x) = -a(x) \cdot y(x)$$

che è una E.D. a variabili separabili

A seguire qualche esempio,

- $y' \underbrace{-x}_{a(x)} \cdot y = \underbrace{2x}_{p(x)}$
- $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} \cdot y = \underbrace{4x^2}_{p(x)}$

E.D. LINEARI DEL I° ORDINE

METODO DEL FATTORE INTEGRANTE

1) Trovo $A(x)$ PRIMITIVA di $a(x)$
2) Moltiplico entrambi i membri per $e^{A(x)}$ per ottenere

$$\underbrace{y'(x) \cdot e^{A(x)} + a(x) \cdot e^{A(x)} \cdot y(x)}_{\left[y(x)\, e^{A(x)}\right]'} = p(x) \cdot e^{A(x)}$$

3) Integro entrambi i membri per ottenere

$$y(x)\, e^{A(x)} = \int p(x)\, e^{A(x)}\, dx + c$$

4) Ricavo $y(x)$ moltiplicando entrambi i membri per $e^{-A(x)}$

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int f(x)\, e^{A(x)}\, dx + c \cdot e^{-A(x)}}$$

SOLUZIONE GENERALE

ESEMPIO: $y'(x) - x \cdot y(x) = 2x$

1) Trovo la primitiva di $a(x) = -x$

$$A(x) = -\frac{x^2}{2}$$

2) Moltiplico entrambi i lati per $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$y'(x) - x \cdot y(x) = 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - x \cdot y(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[y(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right]' = 2x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3) Integro entrambi i lati

$$y(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \int 2x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + c$$

$$\Leftrightarrow \quad \int x\, e^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$y(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 2\cdot\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + c$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = -2\cdot \cancel{e^{-\frac{x^2}{2}}}\cdot \cancel{e^{\frac{x^2}{2}}} + e^{\frac{x^2}{2}}\cdot c$$

$$= -2\cdot 1 + e^{\frac{x^2}{2}}\cdot c$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}}\cdot c - 2$$

Dunque

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\cdot c - 2$$

è la soluzione GENERALE della nostra E.D.
Infatti,

$$y'(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x\cdot c$$

e quindi

$$y'(x) - x\cdot y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x\cdot c - x\left(e^{\frac{x^2}{2}}\cdot c - 2\right)$$

$$= \cancel{e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x\cdot c} - \cancel{e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x\cdot c} + 2x$$

$$= 2x \quad \checkmark$$

Seguono qualche OSSERVAZIONI:

- **OSS. 1:** Se $a(x)$ e $p(x)$ sono funzioni CONTINUE in un certo intervallo I, allora

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int p(x)\, e^{A(x)}\, dx + c\, e^{-A(x)}$$

è la SOLUZIONE GENERALE $\forall x \in I$

E.D. OMOGENEE DEL II ORDINE (A COEFFICIENTI REALI COSTANTI)

Sono della forma,

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Seguono alcuni ESEMPI:

- $y'' + 2 \cdot y' + 2y = 0$
- $\frac{1}{4} \cdot y'' + y' = 0$
- $2 \cdot y'' + 3y = 0$
- $3y' - 2y = 0$

OSS: L'insieme delle SOLUZIONI è uno SPAZIO VETTORIALE di DIMENSIONE 2. Da questo segue che

i) la soluzione GENERALE è della FORMA

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

ii) Se y e $\hat{y}$ sono due SOLUZIONI, allora lo sono anche $c \cdot y$ e $y + \hat{y}$.

Per trovare la BASE (y_1, y_2) dobbiamo risolvere nei NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$ la seguente equazione, detta EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0}$$

A seconda delle SOLUZIONI abbiamo quindi tre casi possibili, che sono:

- Se ho 2 SOLUZIONI REALI DISTINTE $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora la BASE è $e^{\lambda_1 \cdot x}$, $e^{\lambda_2 \cdot x}$ e quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$

- Se ho 2 SOLUZIONI REALI COINCIDENTI $\lambda_1 = \lambda_2$, allora la BASE è $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$, e quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 \cdot x e^{\lambda x}$$

- Se ho 2 SOLUZIONI COMPLESSE $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i \cdot \beta$, allora la BASE è $e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x), e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$, e quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

ESEMPIO:

$y'' - 5y' + 4y = 0$

L'eq. caratteristica è $z^2 - 5z + 4 = 0$
con radici

- $m = \frac{5}{2}$
- $d = \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \sqrt{\frac{25-16}{4}} = \frac{3}{2}$

$\lambda_1 = m - d = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$

$\lambda_2 = m + d = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$

Abbiamo due radici REALI e DISTINTE, e quindi la soluzione generale è della forma

$$y(x) = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{4x}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y'' + 2 \cdot y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

L'eq. caratteristica è $z^2 + 2 \cdot z + 2 = 0$, con radici

- $m = -1$
- $d = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1} = i$
- $\lambda_{1,2} = m \pm d = \alpha \pm i \cdot \beta = -1 \pm i$

Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{-x} \cdot \cos(x) + c_2 e^{-x} \sin(x)$$

Infine, volendo risolvere il sistema di CAUCHY otteniamo

i) $y(0) = c_1 = 1$

ii) $y'(x) = c_1\left[-e^{-x}\cdot\cos(x) - e^{-x}\cdot\sin(x)\right] +$

$$c_2\left[-e^{-x}\cdot\sin(x) + e^{x}\cos(x)\right]$$

$$y'(0) = c_1\cdot(-1) + c_2\cdot(1)$$

$$= -1 + c_2 = 1$$

$$c_2 = 2$$

e quindi la soluzione specifica è

$$y(x) = e^{-x}\cos(x) + 2e^{-x}\sin(x)$$

E.D. DEL II ORDINE : VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Consideriamo eq. diff. della forma

$$y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = f(x)$$

Andiamo adesso a descrivere il metodo della VARIAZIONE DELLE COSTANTI:

1) Determinare la soluzione generale dell'eq. omogenea associata

$$y_0(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

2) Trovare una soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x)$$

tramite il seguente sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\,y_1(x) + c_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\,y_1'(x) + c_2'(x)\,y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

3) Calcolare la soluzione generale nel seguente modo

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

ESEMPIO:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^4}$$

1) Determinare la soluzione generale dell'eq. omogenea associata

EQ. CARATTERISTICA

$$y'' - 2y' + y = 0 \longrightarrow z^2 - 2z + z = 0$$

$$m = 1$$

$$d = \sqrt{1-1} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = m \pm d = 1$$

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \longleftarrow$$

2) Risolvo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x)\, x e^x = 0 \\ c_1'(x)\, e^x + c_2'(x) \left[e^x + x e^x \right] = \frac{e^x}{x^4} \end{cases}$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot x$$

$$-C_2'(x)\cancel{x}\,x e^x + C_2'(x)\cancel{e^x} + C_2'(\cancel{x})\,x e^x = \frac{\cancel{e^x}}{x^4}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{x^4} \qquad C_2(x) = \int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}$$

$$\Rightarrow$$

$$C_1'(x) = -\frac{1}{x^3} \qquad C_1(x) = \int -\frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2x^2}$$

Trovo quindi la soluzione particolare

$$y_p(x) = \frac{1}{2x^2}e^x + -\frac{1}{3x^3}\cdot x e^x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{3}\frac{e^x}{x^2}$$

$$= \frac{3-2}{6}\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{e^x}{x^2}$$

3) Calcolare la soluzione generale

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{e^x}{x^2} + c_1 e^x + c_2 x e^x$$